

Travaux Dirigés n°6

Structure hyperfine et effet Zeeman de l'atome d'Hydrogène

Soit H_0 l'Hamiltonien atomique ne tenant pas compte de l'interaction dipolaire magnétique entre le moment cinétique de spin du noyau $\mathbf{I}$ et le moment cinétique électronique total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ des électrons. Cette interaction donne lieu à la structure hyperfine des raies spectrales. Pour un état propre de H_0 avec nombres quantiques ℓ et j donnés, l'Hamiltonien associé à ce couplage, peut s'écrire :

$$H_{hfs} = A' \frac{1}{\hbar^2} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{J})$$

où

$$A' = \frac{\mu_0}{4\pi} 4 g_I \mu_B \mu_N \frac{Z^3}{a_0^3 n^3 (2\ell + 1) j(j + 1)}$$

avec g_I : facteur de Landé nucléaire (sans dimension), $\mu_B = q_e \hbar / 2 m_e = -9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T : magnéton de Bohr (électronique) et $\mu_N = |q_e| \hbar / 2 M_p = 5.05 \cdot 10^{-27}$ J/T : magnéton de Bohr nucléaire. Pour le proton, $I = 1/2$, $g_I = g_P = 5.585$.

1 Structure hyperfine du niveau 1s de l'hydrogène

On appelle $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$ l'opérateur associé au moment cinétique total de l'atome. Pour l'état 1s, tous les éléments de matrice des composantes L_α sont nulles ; tout se passe donc comme si on avait $\mathbf{J} = \mathbf{S}$.

- Rappeler l'expression des états dans la base du spin total ($\mathbf{S}^2, \mathbf{I}^2, \mathbf{F}^2, F_z$) en termes de ceux de la base ($\mathbf{S}^2, \mathbf{I}^2, S_z, I_z$).
- Exprimer H_{hf} en fonction de $\mathbf{S}^2, \mathbf{I}^2, \mathbf{F}^2$. Calculer ses valeurs propres.
- Exprimer la différence d'énergie entre niveaux consécutifs en fonction de F
- Application numérique : Calculer l'écart d'énergie entre les deux niveaux de structure hyperfine, la fréquence et la longueur d'onde de la transition correspondante.

2 Effet Zeeman sur la structure hyperfine du niveau 1s de l'hydrogène

- Montrer que l'Hamiltonien Zeeman de couplage entre un champ magnétique extérieur B_0 dirigé selon l'axe 0z et les différents moments magnétiques électroniques et nucléaires, peut s'écrire :

$$H_Z = \omega_e (L_z + 2 S_z) + \omega_N I_z$$

où

$$\omega_e = -\frac{\mu_B}{\hbar} B_0; \quad \omega_N = -\frac{\mu_N g_I}{\hbar} B_0$$

- b. Calculer les valeurs propres de H_Z .
- c. Déduire la matrice représentative de l'Hamiltonien $H_1 = H_{hf} + H_Z$ dans la base du moment cinétique total.
- d. Calculer les valeurs propres de H_1 . Tracer leur variation en fonction de B_0 .
- e. Calculer les   tats propres de H_1 . Quels sont les   tats propres pour les limites $B_0 \rightarrow 0$ et $B_0 \rightarrow \infty$?

3 Effet Zeeman sur la structure hyperfine résultante du couplage entre un spin nucléaire $I = 5/2$ et un spin électronique $S = 1/2$ (  tat $L = 0$)

- a. Calculer les valeurs propres associés à H_{hf} en l'absence de champ extérieur B_0 .
- b. Dans le cas $B_0 \neq 0$ tel que $H_{sf} \gg H_Z \gg H_{hf}$ utiliser le calcul de perturbations au premier ordre pour évaluer successivement l'action de H_Z puis de H_{hf} . Montrer que la correction énergétique totale peut s'écrire :

$$\Delta E = -g \mu_B B_0 m_s + A' m_s m_I$$

Travaux Dirigés n°7

Effet Stark de la raie Lyman α de l'atome d'hydrogène

1 Structure fine en champ nul

La raie Lyman α correspond à la transition $n = 2 \rightarrow n = 1$

- En supposant négligeable la structure fine, calculer l'énergie des photons émis lors de cette transition en l'absence de champ extérieur.
- Donner la structure fine du niveau $n = 2$, en déduire la structure fine de la raie Lyman α (on représentera les niveaux sur un diagramme d'énergie).

2 Effet Stark sur le niveau fondamental

- Indiquer la nature de l'interaction Stark. Donner le hamiltonien correspondant.
- Montrer qu'il n'y a pas d'effet Stark linéaire sur l'état $1s$.
- Montrer qualitativement que l'effet Stark quadratique produit un abaissement du niveau fondamental : $\Delta E_{1s}^{(2)}$
- Au second ordre de la théorie des perturbations, il est possible d'obtenir une limite supérieure du déplacement Stark $|\Delta E_{1s}^{(2)}|$ de l'état fondamental en remplaçant $(E_{1s} - E_n)$ par $(E_{1s} - E_2)$. Calculer ce déplacement en utilisant la relation

$$\sum_{n,l,m} |\langle nlm | A | 100 \rangle|^2 = \langle 100 | A^2 | 100 \rangle$$

pour un opérateur A hermitique, que l'on démontrera préalablement.

3 Effet Stark en champ fort sur le niveau $n = 2$

- Indiquer la condition à remplir pour se trouver en champ fort.
- Montrer que l'on peut alors avoir un effet Stark linéaire sur les niveaux excités de l'hydrogène.
- Ecrire la matrice du hamiltonien Stark pour le sous-espace associé au niveau $n = 2$.
- Calculer le déplacement Stark des différents états. Tracer la décomposition du niveau $n = 2$ sur un diagramme d'énergie.
- En utilisant ces résultats et ceux de la partie précédente, représenter sur un diagramme d'énergie les composantes Stark de la raie Lyman α en précisant leur polarisation.

4 Effet Stark en champ faible sur le niveau $n = 2$

- a. Montrer que seuls les états de $j = 1/2$ peuvent subir un effet Stark **linéaire**. Donner la liste de ces états (dans la base couplée).
- b. Ecrire la matrice du hamiltonien Stark pour le sous-espace correspondant à $j = 1/2$. Montrer qu'elle est diagonalisable par blocs (correspondant aux deux valeurs de m_j) que l'on diagonalisera. *on rappelle que Z commute avec J_z*
- c. Effectuer le calcul des éléments de matrice de H_S en exprimant les états de la base couplée à l'aide des états de la base découplée $|l, s, m_l, m_s\rangle$ (coefficients de Clebsch-Gordan).
- d. Montrer alors que le niveau $j = 1/2$ se sépare en deux sous-niveaux Stark dont on donnera l'énergie par rapport au niveau non perturbé.
- e. Représenter sur un diagramme d'énergie la structure Stark du niveau $n = 2$.
- f. Jusqu'à quelle valeur du champ électrique peut-on considérer cette situation (champ faible) comme valable (structure fine de $n = 2 : 0.36 \text{ cm}^{-1}$) ?