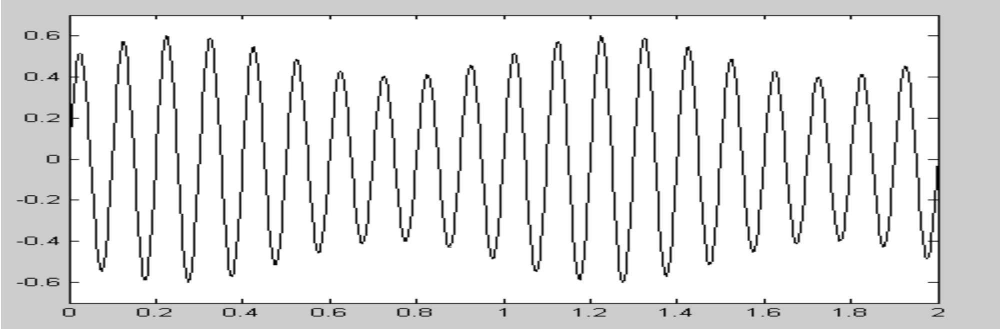
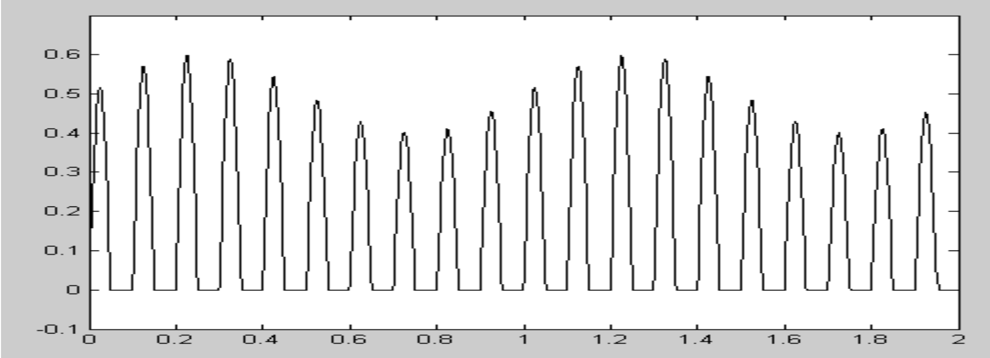
Correction (très détaillée) du sujet INSTRUMENTATION proposé en Janvier 2013 NOTE : /20
Rédaction : P.Cafarelli

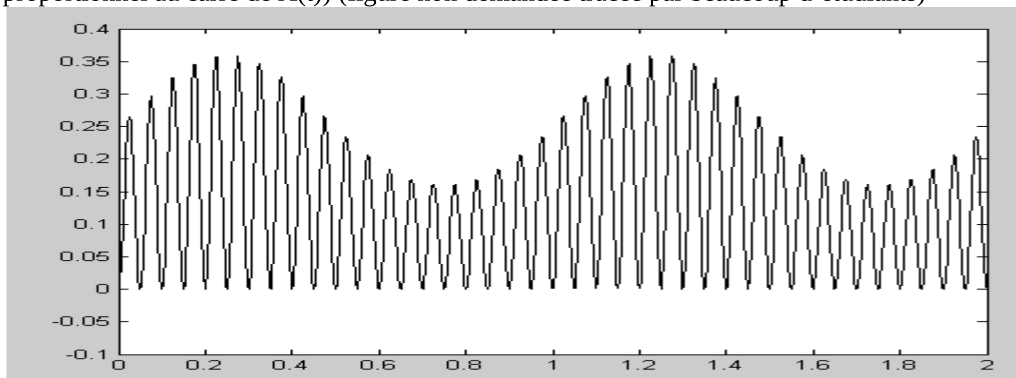
	Exercice 1 (6pts) NB : cette exercice est très dirigé afin de vous amener à la solution avec un bagage en math minimum.. il suffisait donc de se laisser guider …..	
1a	Décaler le graphe de h(t) de nT unités pour obtenir celui de h(t-nT) . Il faut décaler le graphe vers les temps positifs si n est positif (et non vers les temps négatifs !). NB : considérez la fonction h(t)=-t+1 sur [0,1] et nulle ailleurs. Comment calculer/dessiner y(t)=h(t-2) …On a y(0)=h(0-2)=h(-2)=0 puis y(1)=h(1-2)=h(-1)=0 puis y(2)=h(2-2)=h(0)=1 puis y(2+1/2)=h(2+1/2-2)=h(1/2)=1/2 puis y(3)=h(3-2)=h(1)=0 ….. OK ? h(t) réponse impulsionnelle = réponse à un signal d'entrée qui est une (**1 seule**) impulsion. h(t) n'est donc **PAS** un signal périodique et il en est de même pour h(t-nT) ! La réponse impulsionnelle d'un E/B est un créneau de largeur Δ (information donnée en Cours et demandée ici pour tester également votre connaissance du Cours) Dessin=un créneau dessiné dans [0,Δ] + un créneau dessiné dans [0+T, Δ+T].	0.25 0.25 0.25
1b	$TF[h(t-T)=\int h(t-T)e^{-j\omega t}dt=\int h(u)e^{-j\omega(u+T)}du=e^{-j\omega T}\,\hat{h}(\omega)$ Si $u = t\text{-}T$ alors $du = dt$ et $t = u+T$ (beaucoup ont remplacé le signe + par un signe - ???!!!!)	0.25
1c	$p(t)=h(t)+\{h(t-1T_0)+h(t-2T_0)+...\}+\{h(t+1T_0)+h(t+2T_0)+...\}=\sum_{n\in Z}h(t-nT_0)$ La première parenthèse contient la copie de h(t) décalée de T_0 **vers la droite** + la copie de h(t) décalée de $2T_0$ vers la droite etc … La deuxième parenthèse contient la copie de h(t) décalée de T_0 **vers la gauche** + la copie de h(t) décalée de $2T_0$ vers la gauche etc … Au final on obtient bien un signal **périodique** à partir de $h(t)$ NB : si T_0 adapté à la durée de h(t) alors les motifs ne se chevauchent pas (cf oscillogramme 1)	0.25
1d	$TF[p(t)]=\sum_{n\in Z}TF[h(t-nT_0)]=\sum_{n\in Z}e^{-jn\omega T_0}\hat{h}(\omega)=\hat{h}(\omega).\sum_{n\in Z}e^{-jn\omega T_0}=\hat{h}(\omega).q(\omega)=\hat{p}(\omega)$ La deuxième égalité se déduit de la généralisation de *1b* $\sum_{n\in Z}e^{-jn\omega T_0}=q(\omega)$	0.25 0.25
1e	$TF[\delta(t)]=\int\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\int\delta(t)x(t)dt=x(0)=\left[e^{-j\omega t}\right]_{t=0}=1\,\forall\,\omega$ On en déduit (cf rappel formule transformée de Fourier inverse) : $\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int 1(\omega)e^{+j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int e^{+j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int e^{-j\omega t}d\omega$ & $\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int e^{+j\omega t}dt$ Ce sont des expressions sous forme d'intégrales de la fonction de Dirac exprimée en fonction de la variable temps t ou de la variable pulsation ω.	0.25 0.25
1f	$TF[r_{T0}(t)]=TF[\sum_{k\in Z}\delta(t-kT_0)]=\sum_{k\in Z}TF[\delta(t-kT_0)]=\sum_{k\in Z}e^{-j\omega kT_0}TF[\delta(t)]=\sum_{k\in Z}e^{-j\omega kT_0}$	0.25
1g	$q(\omega)=TF[r_{T0}(t)]$	0.25
1h	$r_{T0}(t)=\sum_{m\in Z}c_m e^{+j\frac{2\pi}{T_0}mt}$ avec $c_m=\frac{1}{période}\int_{période}r_{T0}(t)e^{-j\frac{2\pi}{T0}mt}dt$ $c_m=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2}\delta(t)dt=\frac{1}{T_0}$ (car $r_{T0}(t)=\delta(t)$ dans $[-\frac{T_0}{2},+\frac{T_0}{2}]$) .Il ne faut pas oublier que l'on se contente d'intégrer sur la période !	0.5 0.5
1i	$q(\omega)=TF[r_{T0}(t)]=TF[\sum_{m\in Z}c_m e^{+j\frac{2\pi}{T_0}mt}]=\frac{1}{T_0}\sum_{m\in Z}\int e^{+j\frac{2\pi}{T_0}mt}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{T_0}\sum_{m\in Z}\int e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{T_0}m)t}dt$	0.25

	Or $\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-j\omega t}dt$ (cf 1e) d'où $q(\omega)=\frac{1}{T_0}\sum_{m\in Z}\delta(\omega-m\omega_0)$ (Peigne de Dirac)	0.25
1j	**NB** : on souhaitait faire vérifier un résultat bien connu : pour un signal carré seuls les harmoniques **impairs** sont présents (énergie localisée aux pulsations $(2p+1)\omega_0$ **uniquement**) et le rapport de l'amplitude du premier harmonique impair sur l'amplitude de la fondamentale est égal à 1/3. $\hat{p}(\omega_0)=\frac{A_0}{j\pi}$, $\hat{p}(\frac{3}{2}\omega_0)=0$, $\hat{p}(2\omega_0)=0$, $\hat{p}(3\omega_0)=\frac{A_0}{3j\pi}$ $\frac{\hat{p}(2\omega_0)}{\hat{p}(\omega_0)}=0$ et $\frac{\hat{p}(3\omega_0)}{\hat{p}(\omega_0)}=\frac{1}{3}$	0.5 0.25
1k	Le signal d'excitation appliqué sur l'oscilloscope est <u>**périodique**</u>. Cependant en modifiant **la base de temps de l'oscilloscope** l'algorithme FFT de cet appareil « voit » un signal périodique (oscillogramme 1) ou « voit » un seul motif de ce signal périodique (oscillogramme 2). Dans ce dernier cas tout se passe comme si on demandait l'analyse d'un signal transitoire (non périodique). NB : on se rappelle (cf TP) que la FFT travaille sur le signal représenté à l'écran et non sur le signal appliqué sur sa voie d'entrée. Dans le premier cas (oscillogramme 1) le spectre est donc un spectre de raies (caractéristique des signaux périodiques !) alors que dans le second cas on obtient un spectre continu (**c'est la différence essentielle entre les deux spectres**). Les résultats/calculs précédents indiquent que le spectre continu n'est autre que l'enveloppe du spectre de raies (**c'est la similitude entre ces deux spectres**).	0.5 0.5
	Exercice 2 (4pts) Questions de Cours (les approximations ne sont pas acceptées)	
2a	On considère une fonction du temps dont le spectre ne contient pas de fréquence supérieure à f_{max}. Le théorème de Shannon indique que la fonction est alors complètement déterminée en prélevant/donnant ses valeurs en une série de points régulièrement espacés et séparés **au plus** de $1/(2f_{max})$ secondes. Quelques étudiants donnent encore (de manière fausse) la relation 1/(2f) en indiquant que f est la fréquence du signal (un signal carré de fréquence f=10Hz contient une infinité d'harmoniques nf0 en particulier celle à 70Hz!!) …. Il faut remplacer fréquence par fréquence maximale !!	1
2b	L'enseignant a donné lors de son dernier Cours, les questions de Cours susceptibles d'être posées. Celle-ci en faisait partie. Deux étudiants seulement ont répondu à cette question (cf Cours ….)	3
	Exercice 3 (10pts) Inspiré du TP Modulation – Démodulation d'amplitude	
3a	$A(t)=\frac{A_s\sin(\omega_s t)A_p\sin(\omega_p t)}{10}+\alpha A_p\sin(\omega_p t)=\alpha A_p\left[1+\frac{A_s}{10\alpha}\sin(\omega_s t)\right]\sin(\omega_p t)$ La porteuse est aussi injectée sur l'entrée Z via un pont diviseur de tension. Implicitement (rien n'étant indiqué dans l'énoncé) l'impédance de l'entrée Z est infinie. La formule du pont diviseur de tension donne alors Z(t) : $Z(t)=\frac{\alpha R}{\alpha R+(1-\alpha)R}A_p\sin(\omega_p t)=\alpha A_p\sin(\omega_p t)$ $A_0=\alpha A_p$ et $m=\frac{A_s}{10\alpha}$ NB : $Z(t)=\alpha R*I=\alpha R*\frac{A_p\sin(\omega_p t)}{\alpha R+(1-\alpha)R}=\alpha A_p\sin(\omega_p t)$ NB : de nombreuses versions (fausses) ont été proposées ?! Pensez , en particulier, à tester l'homogénéité de vos formules. Ecrire $Z(t)=\alpha RA_p\sin(\omega_p t)$ est irrecevable. NB : tous les étudiants ont observé ce signal lors du TP Modulation-Démodulation NB : signal tracé ci-dessous avec m=0.5 (tous les étudiants ont tracés ce signal dans le cas TRES particulier où m=1 ???….les minimas se rejoignent …. La réponse est validée malgré tout)	0.25 0.25

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>3b</td><td>$TF\left[\sin(\omega_0 t)\right]=TF\left[\frac{e^{+j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right]=\frac{1}{2j}\int e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt-\frac{1}{2j}\int e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt$
$TF\left[\sin(\omega_0 t)\right]=\frac{2\pi}{2j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$ cf **1e**
Manque souvent le j et la différence se transforme souvent en somme ?!</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>$z(t)=x(t)\otimes y(t)=\int x(\tau)y(t-\tau)d\tau$
Quelques étudiants ignorent cette relation, d’autres écrivent $\int x(\tau)y(\tau-t)d\tau$ ce qui est faux.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>3d</td><td>Six étapes (l’énoncé demandait des graphes …… donc implicitement on ne vous demandait pas le passage dans l’espace de Fourier)
1-Tracer la fonction **x** en fonction de la variable τ (x comme y est ici un signal quelconque)
2-Tracer la fonction **y** en fonction de la variable τ
3-Tracer la fonction g(τ) = y(-τ) (g est égale au SYMETRIQUE de y par rapport à l’axe des ordonnées)
(**La majorité des étudiants ont oublié cette étape essentielle** ! ….. il était très maladroit de considérer pour le signal **y** un créneau centrée en t=0 car son symétrique est confondu avec le créneau; prenez un triangle rectangle pour l’illustration!)
4-Décaler, selon l’axe des abscisses, la fonction g(τ) de **t** unités vers les τ croissants (resp. décroissants) si t est positif (resp. t négatif). La nouvelle fonction est v(τ)=y(t-τ).
5-Multiplier x(τ) avec v(z) : on obtient la fonction w(τ).
6- Calculer l’aire sous la courbe w(τ) : c’est la valeur du produit de convolution pour t fixé.
NB : cette lecture graphique de l’intégrale de convolution a été exposée en Cours et en TD.
NB : la bonne connaissance de cette lecture permet de répondre à la question suivante sans faire appel aux mathématiques.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3e</td><td>$\delta(\omega-\omega_s)\otimes\delta(\omega-\omega_p)$?
Tracer la fonction $\delta(\tau-\omega_s)$ => une fonction nulle partout sauf en $\tau=\omega_s$
Tracer la fonction $\delta(\tau-\omega_p)$ => une fonction nulle partout sauf en $\tau=\omega_p$
Tracer la fonction symétrique (par rapport à Oy) de $\delta(\tau-\omega_p)$ => une fonction nulle sauf en $\tau=-\omega_p$
Décaler de **t** unités vers la droite cette fonction => une fonction nulle sauf en $\tau=-\omega_p+t$
Si $-\omega_p+t\neq\omega_s$ alors le produit avec la fonction $\delta(\tau-\omega_s)$ est nul. Par conséquent $\delta(\omega-\omega_s)\otimes\delta(\omega-\omega_p)$ est nulle partout sauf quand $-\omega_p+t=\omega_s$ soit pour $t=\omega_p+\omega_s$ d’où :
$\delta(\omega-\omega_s)\otimes\delta(\omega-\omega_p)\propto\delta(\omega-\omega_s-\omega_p)$ Dirac centrée en $\omega=\omega_s+\omega_p$
…… de même on trouve :
$\delta(\omega-\omega_s)\otimes\delta(\omega+\omega_p)\propto\delta(\omega-\omega_s+\omega_p)$ Dirac centrée en $\omega=\omega_s-\omega_p$
$\delta(\omega+\omega_s)\otimes\delta(\omega-\omega_p)\propto\delta(\omega+\omega_s-\omega_p)$ Dirac centrée en $\omega=-\omega_s+\omega_p$</td><td>0.25
0.25
0.25</td></tr>
</table>

	$\delta(\omega+\omega_s)\otimes\delta(\omega+\omega_p)\propto\delta(\omega+\omega_s+\omega_p)$ Dirac centrée en $\omega=-\omega_s-\omega_p$	0.25
3f	$TF\left[A_0\left[1+m\sin(\omega_s t)\right]\sin(\omega_p t)\right]=A_0\left\{TF\left[\sin(\omega_p t\right]+mTF\left[\sin(\omega_s t))\right]\otimes TF\left[\sin(\omega_p t))\right]\right\}$ En utilisant les résultats de **3b** et **3e** on obtient : $A_0\dfrac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_p)-\delta(\omega+\omega_p)\right]+A_0 m\dfrac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_p+\omega_s)+\delta(\omega+\omega_p-\omega_s)\right]$ $+A_0 m\dfrac{\pi}{2}\left[-\delta(\omega-\omega_p-\omega_s)-\delta(\omega+\omega_p+\omega_s)\right]$	0.5
3g	$(A_0\pi)^2\delta(\omega-\omega_p)+(A_0\pi)^2\delta(\omega+\omega_p)+$ $(A_0 m\dfrac{\pi}{2})^2\delta(\omega-\omega_p+\omega_s)+(A_0 m\dfrac{\pi}{2})^2\delta(\omega+\omega_p-\omega_s)+$ $(A_0 m\dfrac{\pi}{2})^2\delta(\omega-\omega_p-\omega_s)+(A_0 m\dfrac{\pi}{2})^2\delta(\omega+\omega_p+\omega_s)$ Spectre constitué de <u>6</u> raies (cf TP Modulation d'amplitude) dont les **amplitudes** et les **positions** sont : $(A_0\pi,\omega_p)\triangleright(A_0\pi,-\omega_p)\triangleright(A_0 m\dfrac{\pi}{2},\omega_p-\omega_s)\triangleright(A_0 m\dfrac{\pi}{2},-\omega_p+\omega_s)\triangleright(A_0 m\dfrac{\pi}{2},\omega_p+\omega_s)$ $\triangleright(A_0 m\dfrac{\pi}{2},-\omega_p-\omega_s)$	0.25 0.25 0.25 0.25
3h	$\omega_e=\omega_s+2\omega_p$ Le spectre d'amplitude <u>**affiché**</u> par l'oscilloscope s'obtient 1) en **périodisant** (valeur de la période = ω_e) le spectre d'amplitude théorique (périodiser signifie « dupliquer ce spectre via une infinité de translations qui sont des multiples entiers –relatifs- de ωe) 2) en ne conservant **du signal obtenu** que le domaine [0,ω_e/2]. NB : il est toujours vivement conseillé de faire le dessin . La pulsation maximale contenue dans le spectre théorique est $\omega_{\max}=\omega_p+\omega_s$. Comme $\dfrac{\omega_e}{2}=\dfrac{\omega_s}{2}+\omega_p<\omega_{\max}$ la pathologie « **aliasing** » est présente. Après analyse on constate que l' obtient deux raies **uniquement** dont les amplitudes et positions sont $(A_0 m\dfrac{\pi}{2},\omega_p-\omega_s)\triangleright(2A_0\pi,\omega_p)$ **NB** : un alias de la raie théorique située à $\omega=-\omega_p-\omega_s$ se superpose à la raie théorique située à ω_p car $(-\omega_p-\omega_s)+\omega_e=(-\omega_p-\omega_s)+\omega_s+2\omega_p=\omega_p$ NB : quelques rares étudiants ont compris la méthode exposée ci-dessus. A noter que cette méthode a été présentée en Cours, TD et TP de nombreuses fois .	0.25 0.25 0.5 0.5
3i	$A_s\sin(\omega_s t)$ bien sûr !	0.25
3j	Le bloc redresseur supprime les valeurs négatives du signal A(t) (cf formule de la question 3m si on a oublié). **Ces valeurs sont remplacées par la valeur nulle**. La forme du signal A(t) est rappelée en 3a (pour m de l'ordre de 0.5). Il faut donc enlever **toutes** les excursions négatives et **les remplacer par 0**. On obtient donc la figure ci-dessous.	0.25

<table>
<tr><td></td><td>

De nombreux étudiants n'ont pas remplacés les excursions négatives de A(t) par zéro (le montage à diode examiné dans ce sujet n'est pas le montage proposé en TP pour démoduler le signal !!! c'était la seule originalité du sujet)
Rappel : la figure ci-dessous rappelle le signal obtenu à la sortie du démodulateur du TP (signal proportionnel au carré de A(t)) (figure non demandée tracée par beaucoup d'étudiants)

</td><td></td></tr>
<tr><td>3k</td><td>Suiveur (non ce n'est pas un inverseur ou un amplificateur !) et filtre passe-bas (RC)
Une fraction du signal de sortie est réinjecté uniquement sur l'entrée – de l'AOP : ce dernier fonctionne donc en régime linéaire. Donc $v_+=v_-$. Comme $v_- = v_S$ on en déduit que $v_+=v_S$.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>3l</td><td>Adaptation d'impédances au sens de la tension.
Suiveur : impédance d'entrée très grande et impédance de sortie très faible
Les fonctions de transfert des différents blocs ne dépendent pas des liaisons réalisées entre les différents blocs. (Peu d'étudiants l'ont rappelé)</td><td>
0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>3m</td><td>Il faut calculer : $a_0 = \frac{1}{période}\int_{période} signal(t)dt = \frac{2}{\pi}$
La période de la valeur absolue de sin(x) n'est pas la période de sin(x) ! Beaucoup d'étudiants se sont trompés pour avoir oublié ce « détail »
On rappelle que $$\lvert A\rvert = +A \; si \; A > 0 \; et \lvert A\rvert = -A \; si \; A < 0 \; donc \; \frac{1}{2}\{\lvert A\rvert + A\} = 0 \; ou \; A$$ Il y avait donc moyen répondre correctement à 3j même si l'on ignorait la fonction d'une diode associée à une résistance!</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>3n</td><td>$$B(t) = +\frac{A_0}{\pi} - \frac{mA_0}{\pi}\cos(\omega_s t + \frac{\pi}{2}) + \frac{mA_0}{4}\cos[(\omega_p - \omega_s)t] - \frac{A_0}{2}\cos(\omega_p t + \frac{\pi}{2})$$
$$-\frac{mA_0}{4}\cos[(\omega_p + \omega_s)t] - \frac{mA_0}{3\pi}\cos[(2\omega_p - \omega_s)t] - \frac{2A_0}{3\pi}\cos(2\omega_p t) +$$
$$+\frac{mA_0}{3\pi}\cos[(2\omega_p - \omega_s)t + \frac{\pi}{2}]$$
Aucun étudiant n'a réussi à établir l'intégralité de cette expression ! Il suffisait pourtant de</td><td>0.5</td></tr>
</table>

	remplacer (sans se tromper) $\lvert\sin(\omega_s t)\rvert$ par son développement puis de transformer les produits de sin*cos en sommes .	
3o	$[M_{RC}] = \begin{bmatrix} 1 & Z_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_C & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+Z_R Y_C & Z_R \\ Y_C & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix}$ Le déterminant vaut 1. Des étudiants ont écrit, à tort, $[M_{RC}] = \begin{bmatrix} 1 & Z_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y_C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ NB : question de Cours déguisée.	0.5
3p	$[V_e\ I_e]=[M_{RC}][V_s\ I_s]$. On écrit que $I_s = 0$ (charge Z_r infinie) d'où $H_{RC}(\omega)=V_s/V_e=1/a_{11}$. Pour obtenir la fonction de transfert en tension il suffit de prendre l'inverse de l'élément M_{11} de la matrice de transfert inverse $[M_{RC}]$	0.5
3q	<u>**Chaque**</u> terme (cosinus) de B(t) doit être multiplié par la valeur du <u>**gain**</u> $\lvert H_{RC}\rvert$ évalué à la f<u>**réquence du terme**</u> ET l'on doit <u>**ajouter**</u>, dans l'argument de chaque cosinus, un déphasage égal à l'argument de H_{RC} évalué à la **fréquence du cosinus** (3 étudiants ont traité cette question A la fin du dernier Cours ce problème a été rappelé et la réponse donnée.	1
3r	Il faut éloigner le terme de fréquence ω_s des termes de fréquences supérieures. La solution consiste à augmenter la fréquence de la porteuse. NB : pour récupérer uniquement l'information (fréquence ω_s) il faudra aussi éliminer la composante continue en ajoutant à la sortie du RC un filtre passe-haut (de fréquence de coupure petite devant ω_s).	0.5